第1讲 整数与整除

**知识梳理**

**1.整数：**

1. 正整数：我们经常要计算物体的个数，用来表示物体个数的数1,2,3,4,5,…叫做正整数
2. 负整数：在正整数1,2,3,4,…前面添上符号“﹣”，得到的数﹣1,﹣2,﹣3,﹣4,…叫做负整数
3. 零：“0”既不是正整数，也不是负整数，但是“0”是整数.
4. 整数：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_统称为整数.
5. 自然数：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_统称为自然数.

**例1：**填空

最小的正整数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；最小的自然数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；最大的负整数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

**2.整除：**

1. **整除：**整数a除以整数b，如果除得的商是整数而余数为零，我们就说a能被b整除；或者说b能整除a.记作ba，读作b能整除a或a能被b整除，其中a是被除数，b是除数.（被除数是除数的整数倍）
2. **整除的条件：**

①被除数、除数都是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

②被除数除以除数，商是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_而且余数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**例2：**填空：

（1）如果一个正整数除以8，商是2，余数是4，那么这个正整数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（2）如果244=6，那么\_\_\_\_\_\_\_能被\_\_\_\_\_\_\_整除，\_\_\_\_\_\_\_\_能整除\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（3）如果n是一个正整数，且n能被5整除，同时n能整除5，那么n=\_\_\_\_\_\_\_.

**例3：**下面各组数中，如果第一个数能被第二个数整除，请在（）内打“√”

81和3（ ） 56和8（ ） 12和36（ ）

7和84（ ） 75和15（ ） 42和4（ ）

**例4：**下面各组数中，如果第一个数能整除第二个数，请在（）内打“√”

4和36（ ） 15和30（ ） 13和52（ ）

48和12（ ） 17和51（ ） 63和3（ ）

**⑶整除，除尽，除不尽的关系**

1. 整除：被除数，除数，商都是整除，余数为0
2. 除尽：商是有限小数，并不要求被除数和除数为整数
3. 除不尽:商是无限小数，并不要求被除数和除数为整数

总结：**整除是除尽的一种特殊情况；能整除的一定能除尽，能除尽的不一定能整除.**

**例5：**把下列算式填入相应的圈内

150 ；183 ；237；0.60.5；13；6321；114

除尽 除不尽 整除

**例6：**判断题

（1）若整数m除以整数n恰好能除尽，则m一定能被n整除；

（2）若整数m除以整数n恰好能整除，则m一定能被n除尽.

（3）若m÷n＝0.3，则n一定能整除m；

1. **整除的主要性质：**

**①**如果a能被b整除，b能被c整除，那么a能被c整除。记作b|a、 c|b，则c|a；

比如：72能被9整除，9能被3整除，则72能被3整除

**②**如果a能被c整除，b能被c整除，那么a+b，a-b都能被c整除。记作c|a、c|b，则c|(a±b)；

比如：56能被8整除，16能被8整除，则56+16=72，56-16=40都能被8整除；。）

**③**如果a能被c整除，b是任意整数，那么ab能被c整除。记作c|a，则c|ab

比如：39能被13整除，15是整数，3915=585,58513=45所以3915能被13整除

**3.因数和倍数：**

整数a能被整数b整除，也就是说a是b的整数倍，那么a就叫做b的倍数，b就叫做a的因数（也称为约数）.

**注意：**

①因数和倍数是相互依存的.

②被除数是除数的倍数，除数是被除数的因数.

③一个正整数的最大的因数和最小的倍数都是它本身，最小的因数是1.

④1是任何一个整数的因数，任何整数都是1的倍数；

**例7：**在下列横线上填上相应的数

28和7 34和17

\_\_\_\_\_是\_\_\_\_\_\_的因数 \_\_\_\_\_是\_\_\_\_\_\_的因数

\_\_\_\_\_是\_\_\_\_\_\_的倍数 \_\_\_\_\_是\_\_\_\_\_\_的倍数

**例8：**判断题

（1）24÷3＝8，所以24是倍数，3是因数；

（2）2.4÷0.3＝8，所以2.4是0.3的倍数，0.3是2.4的因数；

（3）2.4÷0.3＝8，所以2.4是0.3的8倍；

（4）一个正整数的倍数一定比这个数的任何因数都大；

（5）一个正整数的因数至少有两个；

（6）一个正整数的倍数一定能被它的因数整除；

（7）甲数的最大因数正好等于乙数的最小倍数，则甲数一定大于乙数；

**4.能被2，3，5整除的数**

（1）\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_能被2整除.

正整数按能否被2整除分为两类：奇数和偶数，能被2整除的整数叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；不能被2整除的整数叫做\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（2）\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_能被5整除.

（3）\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_既能被2整除又能被5整除.

**例9：**把下列整除填入相应的圈内

12，27，25，30，51，60，75，96，186，225

能被2整除 能被5整除 既能被2整除又能被5整除

（4）\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_能被3整除.

（5）\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_能被2,3和5同时整除的数.

**例10：**下面个数哪些能被3整除

28，51，55，210，114，216，115，240

**例11：**用0,3,6三个数字组成没有重复数字的 三位数，并填入下列圈内

能被2和3整除 能被2和5整除

能被3和5整除 能被2,3和5整除

**同步训练**

1.解答题

（1）正整数24能被正整数a整除，写出所有满足条件的a的值.

（2）能整除18，又能整除30的整数有几个？最大是多少？

（3）若两个整数a、b都能被不等于0的整数c整除，商分别为m、n.

①写出以上两个整除算式；

②它们的和，差，积也能被整数c整除吗？请你说明理由，并举例说明.

（4）一个数既是3的倍数，又是60的因数，这个数可能是多少？

（5）请写出210所有的因数

（6）①一个长方形的周长是20厘米，且长和宽都是偶数，那么这个长方形的长和宽分别是多少？面积是多少？（相同形状算一种）

②把24个边长为1cm的小正方形纸片拼成一个长方形，一共有多少种拼法？（相同形状算一种）

（7）从5,0,1,3这四个数字中选出三个，组成一个三位数，使得这个三位数能同时被2与5整除，写出满足条件的三位数.

（8）用0,3,5,7四个数字，按要求排成没有重复数字的四位数：

①能被3整除，但不能被5整除；

②能被3整除，又能被5整除；

③能同时被2、3、5整除.

（9）①三个连续自然数之和是54，则这三个数是？

②三个连续偶数之和是54，则这三个数是？

（10）①自然数a≥3，b≥3，a×b＝195，那么a和b的值可能是多少？

②有一个自然数，它的最小的两个因数的差是4，最大的两个因数的差是308.那么，这个自然数是多少？

③把自然数A的所有因数两两求和，得到若干个自然数，在这些自然数中，最小的数是4，最大的数是324，那么A是多少？

2.拓展

⑴能被4整除的数：末两位是4的倍数

⑵能被6整除的数：能同时被2和3整除的数

⑶能被7整除的数：

①末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数之差是7的倍数

②把一个整数的个位数字截去，余下的数与个位数的2倍的差是7的倍数

⑷能被8整除的数：末三位是8的倍数

⑸能被9整除的数：各个数位上的数字之和是9的倍数

⑹能被10整除的数：能同时被2和5整除的数

⑺能被11整除的数：

①末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数之差是11的倍数

②把一个数从右往左数，奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差是11的倍数

⑻能被12整除的数：能同时被3和4整除的数

⑼能被13整除的数：末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数之差是13的倍数

1.判断6139能不能被7整除

2.判断491678能不能被11整除

3.判断2146455311能不能被13整除

4.65431至少增加多少才能被2整除？至少增加多少才能被3整除？至少增加多少才能被4整除？至少增加多少才能被5整除？至少增加多少才能被6整除？至少增加多少才能被9整除？至少增加多少才能被10整除？至少增加多少才能被11整除？

5.四位数是18的倍数，要使这个四位数尽可能地小，a和b是什么数字？

第2讲 分解素因数

**知识梳理**

**1 .素数和合数：**

根据正整数的因数的个数，把正整数分为了以下几类：

* 素数：只有1和它本身两个因数的正整数
* 合数：除了1和它本身，还有别的因数的正整数
* 由于1只有1一个因数，所以**1既不是素数也不是合数**

总结：**一个素数只有两个因数，一个合数最少有三个因数**

**例1：**填空

1. 最小的质数是\_\_\_\_\_\_\_\_ ；质数中唯一的偶数是\_\_\_\_\_，也就是说\_\_\_\_\_是唯一的偶质数.
2. 最小的奇数又是素数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；
3. 10以内（不包括10）最大的偶数又是合数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；
4. 最小的合数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；最小的奇数又是合数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；
5. 在正整数中既不是素数也不是合数的是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；
6. 10以内最大的素数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；最小的自然数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.
7. 若a,b都是素数，则m=a一定是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.（填“素数”或“合数”）

**例2：**把下列个数填入适当的圈内

23，32，47，65，71，78，93

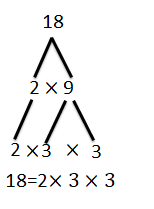
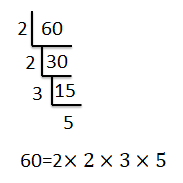
合数

素数

**2.分解素因数：**

* 素因数：每个合数都可以写成几个素数相乘的形式，其中每个素数都是这个合数的因数，叫做这个合数的素因数.
* 分解素因数：把一个合数用素因数相乘的形式表示出来，叫做分解素因数.
* 分解素因数的方法：

树枝分解法： 短除法： 在左侧写除数，下方写商的除法格式

**例3：**下列各式中表示分解素因数的式子是  （ ）

A.215=30 B.60=256 C.12=431 D.45=335

**例4：**用树枝分解法和短除法把60分解素因数

**3.合数的因数的个数与其素因数的个数间的关系：**

若合数A分解素因数后得到：A＝，其中p1,p2pn 是A的不同种类的素因数，a1,a2an是这些素因数的个数，则A的因数的个数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**例5：**求540的因数的个数

**4.奇数和偶数的运算性质：**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 数 | 相加 | 相减 | 相乘 |
| 奇数和奇数 |  |  |  |
| 奇数和偶数 |  |  |  |
| 偶数和偶数 |  |  |  |

**例6：**两个素数的和是2001，这两个素数的乘积是多少？

**例7：**七个连续素数，从大到小排列为a、b、c、d、e、f、g.已知它们的和是偶数，那么c是多少？

**同步训练**

1.下列说法正确的有（ ）个.

①两个素数的积一定是合数 ②任何合数加上1都成为奇数

③任何素数加上1数都成为偶数 ④两个合数的和一定是素数

⑤两个素数的和一定是合数 ⑥两个素数的和一定是偶数

⑦两个偶数的和一定是合数 ⑧两个不同正奇数的和一定是合数

A. 1 B. 2 C.3 D.4

2.一个四位数，千位上的数字既是奇数又是合数，百位上的数字既不是素数，也不是合数；十位上的数字是最小的素数；个位上的数字既是偶数又是素数，求这个四位数.

3.将26分成两个不同素数的和.

4.求1260的因数个数.

5.已知大于1的自然数a只有两个因数，那么3a有多少个因数？

6.从1~100这100个自然数中任取其中的n个，要使这n个数中至少有一个合数，则n至少是多少？

7. ⑴三个连续的偶数，它们的平均数能被2,3,5同时整除.要使得这三个偶数的和最小，那么这三个偶数是多少？

⑵三个连续的偶数，它们的平均数能被三个不同的素数整除. 要使得这三个偶数的和最小，那么这三个偶数是多少？

8.一个素数的3倍与另一个素数的2倍之和为2000.那么这两个素数的和是多少？

9.一个数是5个2、3个3、2个5、1个7的连乘积，这个数当然有许多因数是两位数，这些两位数的因数中，最大的是几？

10.某初中学生参加计算机操作技能比赛，他获得的名次、他的年龄、他得的分数的乘积是2910.试问这个学生得第几名？成绩是多少？（计算机操作技能比赛的满分为100分）

11.把462名学生分成人数相等的若干组参加课外活动小组，每组人数在10~25人之间，求每组人数及分成的组数.

12.下面的算式里，四个小纸片各盖住了一个数字，被盖住的四个数字之和是多少？



13.393除以一个两位数，余数为8，这样的两位数有多少个？求出所有符合条件的两位数.

14.四个连续自然数的乘积是11880，这四个数分别是多少？

第3讲 公因数与公倍数

**知识梳理**

**1.公因数：**

（1）公因数：几个数公有的因数，叫做这几个数的公因数，最大的一个叫做这几个数的最大公因数，记作(a,b).

（2）互素：如果两个整数只有公因数1，那么称这两个数互素，即(a,b)＝1.这说明如果这两个数互素，那么它们的最大公因数是1

（3）两两互素：几个数中任意两个数都互素时，则称两两互素，如(3,4,5,11)=1.

（4）两个整数中，如果一个数是另一个数的因数，那么这个数就是这两个数的最大公因数.

（5）最大公因数的求法：

求几个整数的最大公因数，只要把它们公有的素因数连乘，所得的积就是它们的最大公因数.

①分解素因数法； ②短除法；

**例1：**求下面各组数的最大公因数

8和9 24和32 17和51

**例2：**判断题

（1）相邻的两个正整数一定互素. （ ）

（2）两个不同的素数一定互素. （ ）

（3）两个合数一定不互素. （ ）

（4）两个奇数的公因数一定是1. （ ）

（5）所有正整数不是素数就是合数. （ ）

（6）互素的两个数一定都是素数. （ ）

**2.最小公倍数：**

（1）公倍数：几个整数的公有的倍数，叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数，记作[ a，b].

（2）两个整数中，如果一个数是另一个数的倍数，那么这个数就是它们的最小公倍数.如果这两个数互素，那么它们的乘积就是它们的最小公倍数.

（3）最小公倍数的求法：

求几个整数的最小公倍数，只要把它们公有的素因数与它们各自剩余的素因数连乘，所得的积就是它们的最小公倍数.

①分解素因数法；②短除法；

**例3：**求下面各组数的最小公倍数

18和27 14和4 15和20

**3.这两个数的最大公因数与最小公倍数的关系.**

①最大公因数×最小公倍数＝两数之积.

②两个数的最小公倍数一定能被这两个数的最大公因数整除.

**例4：**已知A与B的最大公因数为6，最小公倍数为84，且A＝42，求B.

**例5：**已知两数的最大公因数是21，最小公倍数是126，求这两个数的和是多少？

**例6：**已知两个自然数的积为240，最小公倍数为60，求这两个数.

**例7：**已知两个自然数的和是50，它们的最大公因数是5，求这两个自然数.

**4.求三个数的最大公因数和最小公倍数**

①三个数的最大公因数是这三个数公有的素因数的乘积.

②三个数的最小公倍数是这三个数公有的素因数和每两个数公有的素因数以及各自剩余的素因数的乘积.

**例8：**求下列各组数的最大公因数和最小公倍数.

8、 12 和 30 24、 36和48 16、24和32

**同步训练**

1. 用分解素因数法、短除法求最大公因数和最小公倍数

30和45 72和90 21和35 17和68

36 和 84 45 和 54 90 和 135 12和18

2.已知A＝2×2×5×m，B＝2×3×5×m，A、B的最小公倍数是420，求m的值.

3. (1)已知正整数m、n满足m÷n＝9，则m与n的最小公倍数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)用一个数去除以42、56，正好都能整除，符合条件的数中最小的一个是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

4.三个连续自然数的最小公倍数是360，求这三个数.

5.已知a与b，a与c的最大公因数分别是12和15，a、b、c的最小公倍数是120，求a,b,c.

6.有三个互不相同的数，它们的和为721.它们的公因数最大可能是多少？

**7.**现有四个自然数，它们的和是1111.如果要求这四个数的公因数尽可能大，那么这四个数的公因数最大可能是多少？

**强化训练**

1.甲、乙、丙三个班的同学去公园划船，甲班49人，乙班56人，丙班42人.把各班同学分别分成小组，分乘若干条小船，使每条船上人数相等，最少要多少条船？

2.有三根铁丝，长度分别是120厘米、180厘米、300厘米.现在要把它们截成相等的小段，每根都不能有剩余.每小段最长多少厘米？一共可以截成多少段？

**3.**兄弟三人在外工作，大哥6天回家一次，二哥8天回家一次，小弟12天回家一次.兄弟三人同时在十月一日回家，下一次三人再见面是哪一天？

4.三个朋友每人隔不同的天数去图书馆一次，甲3天一次，乙4天一次，丙5天一次.上次三人是星期二在图书馆相逢的，至少要过多少天才能在图书馆重逢？重逢时是星期几？

5.有一筐鸡蛋，4个4个地数余2个，5个5个地数余3个，6个6个地数余4个.这筐鸡蛋最少有多少个？

**6.**爷爷对小明说：“我现在的年龄是你的7倍，过几年是你的6倍，再过几年分别是你的5倍、4倍、3倍、2倍.”你知道爷爷和小明现在的年龄吗？

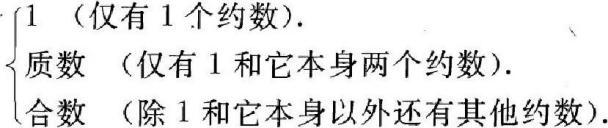
7.大雪后的一天，亮亮和爸爸从同一点出发沿同一方向分别步测一个圆形花坛的周长.亮亮每步长54厘米，爸爸每步长72厘米，由于两个人的脚印有重合，所以雪地上只留下60个脚印.问这个花坛的周长是多少？

8.茶叶店销售三种级别的茶叶，已知一级绿茶144克，二级绿茶180克，或三级绿茶240克的价格都是60元，现在将这三种绿茶分别按整克数装袋出售，要求每袋的价格都相等，那么每袋的价格最低是多少元？

第4讲.质数与合数加深

知识要点及方法、技巧

若把正整数按其因数的个数进行分类，那么正整数可分为三类



由此可知，2是最小的质数，也是唯一一个是偶数的质数，其他质数都是奇数.

4是最小的合数，为了判定一个数是否是合数，要掌握一些如被2、3、5、11等数整除的特征.

算术基本定理（又称“正整数唯一分解定理”）：任一大于1的正整数都可分解成若干[**素因数**](https://baike.so.com/doc/5389003-5625581.html)的连乘积的形式，而且这些素因数按大小排列之后，这种分解的写法仅有一种。N= ，其中P1，P2，…，Pn为质因数，α1，α2，…αn 为正整数。这样的分解称为 **N**的标准[分解式](https://baike.so.com/doc/6971699-7194385.html)。

一、选择题（每小题7分）

1.若P为质数，且P3+3也为质数，则P5+7为( )

A.质数 B.合数 C.合数且为偶数 D.无法确定

2.将2005表示成两个质数之和的方法有( )

A.1种 B.2种 C.3种 D.4种

3.三个质数x，y，z都小于100，方程x+y=z且x<y<z，有( )组解.

A.6 B.7 C.8 D.9

4.下列质数中不能写成三个合数之和的是( )

A.13 B.17 C.19 D.23

5.任意调换123456各数位上数字的位置，所得的六位数中质数的个数是( )

A.4 B.8 C.10 D.0

二、填空题（每小题7分）

7.已知p、q均为质数，m、n为正整数，且p=m+n，q=m×n，则m+n个（p-q）的积为=\_\_\_\_\_\_.

9.在1，2，3，…，n这n个自然数中，已知共有p个质数，q个合数，k个奇数，m个偶数， 则(m-q)+(k-p)=\_\_\_\_\_\_

10.在三张纸片上分别写上三个最小的连续的奇质数，如果从中至少取出2张组成一个数，其中有\_\_\_\_\_\_个是合数.

三、解答题

11.（20分）一个数p为质数，并且p+10，p+14也是质数，p是多少？除此之外还有别的数吗？

12.（25分）证明.大于12的整数都可以表示成两个合数之和.

第5讲.数的整除性

知识要点及方法、技巧

整除有以下基本性质.

1.若b|a，c|b，则c|a；

2.若c|a，c|b，则c|(a±b)；

3.若a|bc，且(a,c)=1，则a|b，特别地，若p为质数，且p|bc，则必有p|b或p|c；

4.若b|a，c|a，且(b,c)=1，则bca，以上基本性质都可由算术基本定理而得到证明.

此外，被2,3,4,5,6,7,8,9,11,13整除的特征.

整数的整除问题，它的基础知识并不难掌握，但是用整除法去解决问题时往往需要一定的技巧.在方法技巧上注意整数知识的综合运用和运用逻辑推理方法分析和解决问题的习惯，有些问题解决起来想法比较困难，这些想法都往往是在实践、探索中获得的.同学们要善于多方面思考，对复杂问题要注意化难为易，把问题简单化，同时要善于运用分类讨论方法，将整数按被n除的余数分类，再逐一讨论之.

一、选择题（每小题7分）

1.n为正整数，302被n(n+1)除所得商数q及余数r都是正值，则r的最大值与最小值的和是( )

A. 148 B.247 C.93 D.122

2.在1到1000这1000个自然数里既不是3的倍数，也不是7的倍数的数有( )

A. 428个 B.572个 C.367个 D.525个

3.248-1可被60与70之间的两个数所整除，这两个数是( )

A. 63、65 B.63、67 C.61、63 D.61、65

4.一个六位数被88整数，则a、b的值分别为( )

A.a=1，b=4 B.b=3，a=2 C.a=3，b=2 D.a=b=3

5.有一个被11与19同时整除的最大5位数，则这个5位数是( )

A. 10032 B.10241 C.10034 D. 10000

6.将两位数中间插入某一个数字（包括0）后变成一个三位数，且这个三位数是原两位数的9倍，这样的两位数共有( )个

A.1 B.4 C.10 D.大于10

二、填空题（每小题7分）

7.x和y分别为\_\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_\_时，能被9整除，且被8除余2.

8.用1、2、3、4、5、6、7、8、9九个数字组成三个三位数（每个数字只用一次），使其中最大的三位数被3除余2，并且尽可能地小；次大的三位数被3除余1；最小的三位数能被3整除.那么，最大的三位数是\_\_\_\_\_\_.

9.在所有的四位数中，各位数字之和等于34，且能被11整除的数是\_\_\_\_\_\_.

10.有一个1987位数A能被9整除，它的各位数字的和为a，a的各位数字的和为b，b的各位数字的和为c，则c等于\_\_\_\_\_\_.

三、解答题，证明题（70分）

11.（20分）已知x、y、z为整数，且11|(7x+2y-5z).求证：11|(3x-7y+12z).

12.（25分）已知定理：“若三个大于3的质数a、b、c满足关系式2a+5b=c，则a+b+c是整数n的倍数”.问上述定理中的整数n的最大可能值是多少？说明你的理由.

13.（25分）已知六位数N的前三位组成的数与后三位组成的数之和能被111整除.求证：111|N.

第6讲 整数与整除单元测试

1. **填空题（每空2分，共30分）**
2. \_\_0\_\_\_\_和\_\_\_\_\_正整数\_\_\_\_\_0\_\_\_\_统称自然数，\_正整数\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_,\_\_\_\_负整数\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_和\_\_\_\_0\_\_\_\_统称整数.
3. 一个正整数的最小因数是\_\_\_\_1\_\_\_\_，最大因数是\_\_\_\_它本身\_\_\_\_\_.
4. 一个正整数的最小倍数和最大因数的差为\_\_\_0\_\_\_\_\_.
5. 唯一的偶质数是\_\_\_\_\_2\_\_\_.
6. 分解素因数60=\_2235\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.
7. 一个数既是12的因数又是12的倍数，这个数是\_\_\_12\_\_\_\_\_.
8. 如果两个数只有公因数1，那么称这两个数\_\_\_互素\_\_\_\_\_.
9. 1080的因数的个数是\_\_32\_\_\_\_\_\_.
10. 若a,b都是素数，则c=ab一定是\_\_合数\_\_\_\_\_\_.（填“素数”或“合数”）
11. 两个奇数的和一定是\_\_偶数\_\_\_\_\_\_.（填“奇数”或“偶数”）
12. **判断题（每小题2分，共30分）**
13. 若整数m除以整数n恰好能除尽，则m一定能被n整除； （ × ）
14. 若整数m除以整数n恰好能整除，则m一定能被n除尽； （ √ ）
15. 36÷3＝12，所以36是倍数，3是因数； （ × ）
16. 3.6÷0.3＝12，所以3.6是0.3的倍数，0.3是3.6的因数； （× ）
17. 3.6÷0.3＝12，所以3.6是0.3的12倍；（ √）
18. 1---100这100个自然数中一共有25个素数，74个合数；（ √ ）
19. 一个合数至少有三个因数，一个素数只有两个因数；（ √ ）
20. 一个正整数的倍数一定能被它的因数整除； （ √ ）
21. x的最小倍数正好等于y的最大因数，则x一定小于y；（ × ）
22. 3.6能被9整除 ； （ × ）
23. 任何合数加上1都成为奇数；（× ）
24. 两个合数的和一定是合数；（ × ）
25. 两个素数的和一定是奇数 ； （ × ）
26. 两个偶数的和一定是合数； （ × ）
27. 两个奇数的和一定是合数；（ × ）
28. **解答题(第5题10分，其余每题5分，一共40分)**
29. 如何判断一个正整数能否被7整除

①如果一个正整数的末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数之差是7的倍数，那么这个数可以被7整除

②把一个整数的个位数字截去，余下的数与个位数的2倍的差是7的倍数，那么这个数可以被7整除

1. 如何判断一个数能否被11整除

①如果一个正整数的末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数之差是11的倍数，那么这个数可以被11整除

②如果一个正整数从右往左数，奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差是11的倍数，那么这个数可以被11整除

1. 如何判断一个数能否被13整除

如果一个正整数的末三位数字所表示的数与末三位以前的数字所表示的数之差是13的倍数，那么这个数可以被13整除

1. 5.四位数是18的倍数，要使这个四位数尽可能地小，a和b是什么数字？

a=1,b=6

1. 用短除法求下列各组数的最大公因数与最小公倍数

（1）24和72 （2）24，32和48

最大公因数24 最大公因数8

最小公倍数72 最小公倍数96

1. 六年级学生做操，每16人排一行或者每20人排一行，都能排成整数行，这个年级至少有学生多少名？

80人

1. 有两根木料，一根长15米，另一根长20米，现在要把它们截长度相等的几小段，每根不许有剩余，问：每小段最长是多少米？

5米

第7讲 分数

**知识梳理**

**1.分数的意义和性质**

* **分数与除法：**

被除数÷除数=，也就是说两个正整数p,q相除，可以用分数表示.即p÷q=，其中p为分子，q为分母.读作q分之p，特别地当q=1时， = p

* **分数的基本性质：**分数的分子和分母都乘以或都除以一个不为零的数，所得的分数与原分数的大小相等，即 = = (b).

**例1：**选择题

1. 若 ＝，则a、b的值分别是（ ）

A．a＝13 b＝29 B．a＝29 b＝13 C．a＝ b＝1 D．无法确定

1. 如果一个分数的分子缩小至原来的，分母扩大至原来的4倍，那么这个分数（ ）

A．不变 B．与原来分数相等 C．是原来分数的 D．是原来分数的16倍

* **最简分数：**分子和分母互素的分数叫做最简分数；把一个分数的分子与分母的公因数约去的过程，叫做**约分**.通过约分可以化简分数；给一个分数的分子和分母同时除以它们的最大公因数可以把这个分数化为最简分数.

**例2：**以下正确的是（ ）

A．分子，分母都是偶数的分数不一定是最简分数

B．分母，分子中有一个是素数的分数一定是最简分数

C．分子，分母只有1是公因数的分数，一定是最简分数

D．分子，分母都是奇数的分数一定不是最简分数

**例3：填空**

1. 介于之间，且分母为28的最简分数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.
2. 介于之间，且分子为5的最简分数是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.
3. 比小且比较大的分数有\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_个.

* **分数的大小比较：**

1. **分母通分法：**将异分母的分数分别化为与原分数大小相等的同分母的分数的过程叫做通分. 这个分母叫做公分母；

①同分母的分数比较大小，分子越大，分数越大；

②异分母的分数比较大小，先通分化为同分母的分数，再比较大小；

③通分的方法：找到几个分数的分母的最小公倍数，并以最小公倍数作为公分母，根据分数的基本性质，分子分母同时扩大相应的倍数，把原分数化成与原分数相等的以公分母为分母的分数.

**例4：**比较下列各组分数的大小

（1） (2)，和

1. **分子通分法：**当分母通分计算比较复杂时，可以将分数化成分子相同的分数来比较大小.

分子相同，分母越大，分数值越**小；**分子相同，分母越小，分数值越**大；**

**例5：**在＜中的括号内填入哪些正整数，式子能够成立？

**例6：**⑴比较分数和的大小.

⑵比较这三个分数的大小.

1. **作商比较法：**a，b都是正数，如果a÷b<1，那么a<b;如果a÷b>1，那么a>b;如果a÷b=1，那么a=b.

**例7：**⑴比较的大小.

⑵比较的大小.

⑶比较的大小.

1. **作差比较法：**若两个分数都接近于1，可以把两个分数写成1加减一个分数的形式，然后再比较这个分数的大小.

**例8：**比较和的大小.

1. **分数的运算**

* **分数的加减法**
* 同分母分数相加减，分母不变把分子相加减；异分母分数相加减，先通分，然后按照同分母分数加减法法则进行计算.注意：**结果一定要化简**（化成最简分数或整数）.
* 分子比分母小的分数叫做真分数；分子大于或等于分母的分数叫做假分数；一个正整数与一个正分数相加所成的分数叫做带分数.
* 分数与分数加减混合运算：

先去括号；优先同分母加减，化简后再与异分母加减；全是异分母的运算可以整体通分，也可先部分通分.

**例9：**计算：

1. ﹣＋﹣

(2)

(3)

(4)

(6)＋＋＋…＋

(7)＋＋＋…＋

(8)＋＋＋…＋

(9)＋＋＋…＋

(10)1＋＋＋＋＋＋

(11)﹣＋﹣＋﹣

* **分数的乘除法**

**⑴分数的乘法**

* 分数与分数的乘法的意义：两个分数相乘×的意义为，在分数的基础上，以为总体，将其平均分成n份，取其中的m份，结果为×.
* 分数的乘法计算法则：两个分数相乘，将分子相乘的积作积的分子，分母相乘的积作积的分母.
* 注意：①乘法计算时，乘数中有带分数，先将带分数化成假分数再进行计算；

②能约分的要先约分，再计算；

③整数乘以分数时，整数与分数的分子的积作分子，分母不变.

**例10：**计算

1. 2××3 (2)1×5×2

**例11：**用简便方法计算

1. (2)2018× (3)

(4)10×13 (5)11×＋ (6)

(7) (8)()×()

(9) (10)(﹣＋)×

(11)

(12)()×()

(13)

(14)

**⑵分数的除法：**

* **倒数：**1除以一个不为零的数得到的商，叫做这个数的倒数.

**例12：**填空

a的倒数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 的倒数为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

互为倒数的两个数乘积为\_\_\_\_\_\_\_\_ 0的倒数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

* **分数除法的计算法则**：甲数除以乙数（0除外），等于甲数乘以乙数的倒数.

用字母表示为：÷＝×（p，q，m，n均不为0）.

**例13：**计算

(1) (2)

(3) (4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

(10)

(11)

(12)

**例14：**用简便方法计算

(1) 1001×

(2)

(3)

(4)

**3.分数与小数**

* **分数化小数**

①分子能被分母除尽的分数，化成小数后是有限小数；

②分子不能被分母除尽的分数，化成小数后是无限小数；

③一个最简分数，如果分母中只含有素因数2和5，再无其他素因数，那么这个分数可以化成有限小数，否则就不能化成有限小数.

**例15：**在分数，，，，中，能化为有限小数的分数是哪些？

* **小数化分数**

⑴有限小数化分数

* 有限小数：纯小数：整数部分是0的有限小数；混小数：整数部分不是0的有限小数
* 纯小数化分数：原来有几位小数，就在1后面写几个零作分母，把原来的小数去掉小数点以及小数点前面的0作分子，最后化成最简分数；
* 混小数化分数：小数部分与纯小数化分数相同，原来的整数部分作为带分数的整数部分.

**例16：**将0.6，0.16，2.166将下列小数化成分数：

⑵循环小数化分数：

如果循环小数的整数部分不是0，则将循环小数写成“整数+小数”的形式，其中整数作为整个分数的整数部分，即带分数的整数部分，小数按照下列方法化为分数.

如果循环小数的整数部分是0，则按照下列方法化为分数.

* 一个小数从小数部分的某一位起，一个或几个数字依次不断地重复出现，这样的小数叫做**循环小数**.一个循环小数的小数部分中依次不断地重复出现的第一个最少的数字组叫做这个循环小数的**循环节**. 循环节从小数部分第一位开始的循环小数叫做**纯循环小数**；循环节不是从小数部分第一位开始的循环小数叫做**混循环小数.**
* 纯循环小数化分数：循环节有几位，就在分母上添几个9，并将循环节添在分子上；
* 混循环小数化分数：循环节有几节，就在分母上添几个9，小数部分不循环的小数有几位，就在9后面添几个0作为分母，小数的非循环部分与第一个循环节所组成的数减去小数的非循环部分所组成的数的差作为分子.

**例17：**将0.、0.、0.6 、0.3、2.3、0.65、3.1化成分数.

**例18：**计算

（1）0.＋0.＋0.＋0.＋0.＋0.＋0.＋0.（结果写成分数形式）

（2）0.1＋0.＋0.125＋（结果写成分数形式）

**例19：**.观察以上各式，利用你发现的规律，快速将下列分数化为循环小数：

1. (2) (3) (4) (5)

* 分数与小数的混合运算

**⑴分数与小数的运算**

* 分数与小数的互化原则：

①分数能化成有限小数的，化成小数计算比较简单，分数不能化成有限小数时，需要把小数化成分数再计算；

②题目中含分数或小数哪个多，就保留哪个，把个数少的转化为个数多的形式；

③加减法计算时，化成小数计算比较简单；乘除法计算时，化成分数计算比较简单.

* 运算顺序：先乘除，后加减，有括号的先算括号里的.

**例20：计算**

(1)÷(2.2－)＋×0.6 (2)[÷(0.8－)－1.2]÷2

(3)4×2＋8×14﹣4×14 (4)172.4×6＋272.4×3

(5)7﹣﹣﹣﹣﹣﹣

(6)(1＋)×(1﹣)×(1＋)×(1﹣)×…×(1＋)×(1﹣)

(7)1＋＋()2＋()3＋()4＋()5＋…＋()n

**⑵繁分数运算**

* 一个分数，如果其分子或者分母也是分数，或分子和分母均是分数，则称为“繁分数”.在一个繁分数里，最长的分数线叫做繁分数的主分数线，主分数线上下不管有多少个数，都把它们分别看作是繁分数的分子和分母。
* 繁分数的化简一般采用以下两种方法。

①先找出主分数线，确定分子部分和分母部分，然后这两部分分别进行计算，每部分的计算结果能约分的要约分，最后改成“分子部分÷分母部分”的形式，再求出结果。

②根据[分数的基本性质](https://baike.so.com/doc/7045993-7268899.html)，经繁分数的分子部分和分母部分同时扩大相同的倍数（这个倍数必须是分子部分与分母部分所有分母的最小公倍数），从而去掉分子部分和分母部分的分母，然后通过计算化为最简分数或整数。

**例21：**化简繁分数：

(1) (2) (3)1－

**例22：**计算：

**例23：**A、B、C、D、E表示5个自然数（可以相同），且有下面的等式成立.

求A、B、C、D、E的值.

分数的巧算 （补充）

掌握以下几种方法：裂项相消法，倒序相加法，错位相减法

⑴裂项相消法：

①裂差法：一般是连加交替的算式采用

裂差公式

**( )**

**=**

**如果后一项是前一项的一半，那么后一项=前一项**

例9:计算：

(9)＋＋＋…＋

(10)1＋＋＋＋＋＋

②裂和法：一般是加减交替的算式采用

裂和公式：= + ；

(11)﹣＋﹣＋﹣

补充：（12） + ⋯ +

（13）

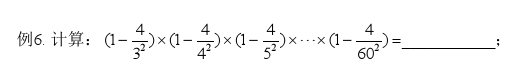
**例20：**(5)7﹣﹣﹣﹣﹣﹣

③裂积法：一般是连乘的算式采用

**例20：**(6)(1＋)×(1﹣)×(1＋)×(1﹣)×…×(1＋)×(1﹣)

补充:





⑵倒序相加法: 如果在一个算式中，与首末项等距的两项之和等于首末两项之和，可采用把正着写与倒着写的两个算式相加，结果是首末两项之和与项数的乘积，这一求和方法称为倒序相加法。

例：++⋯+

⑶错位相减法

**例20：**(7)1＋＋()2＋()3＋()4＋()5＋…＋()n

第8讲 分数应用题（一）

**知识梳理**

1. **分数应用题解题思路：**先确定将哪个量看作单位“1”，再确定单位“1”的量与其他量之间的关系.
2. **分数应用题的数量关系式：**
3. 已知一个量，求它的几分之几是多少：把这个量看作单位“1”，**单位“1”所对应的量×几分之几＝几分之几所对应的量**；
4. 已知一个量，求比它多（少）几分之几是多少：把这个量看作单位“1”，**单位“1” 所对应的量×（1±几分之几）＝几分之几所对应的量**；
5. 已知一个量的几分之几是多少，求这个量：把这个量看作单位“1”，**这个量的几分之几所对应的量÷几分之几＝单位“1” 所对应的量**.

**典型解析**

* **分数应用题的数量关系式（1）**

**例1：**一批水果有香蕉、橘子、苹果，其中香蕉占这批水果的，橘子占这批水果的，问苹果占这批水果的几分之几？

**例2：**甲乙两地间的公路长1000千米，一辆汽车从甲地开往乙地.第一天行了全程的，第二天行了全程的，第三天到达目的地.问第三天行了多少千米？

**例3：**某校初三学生在体育达标测试中，有250人参加，其中是女生，其余是男生，结果男生中的以及女生中的未达标，问达标学生共多少人？

* **分数应用题的数量关系式（2）**

**例4：**某班级中男生的人数比女生的人数多，则男生的人数占全班人数的几分之几？

**例5：**水结成冰，体积增加了.体积是150立方米的水结成冰后，体积是多少立方米？

**例6：**甲、乙两个班级，乙班的人数比甲班少，在甲班中女生人数比男生人数少，而在乙班中女生人数则比男生人数多，则甲班的女生占乙班女生的几分之几？

* **分数应用题的数量关系式（3）**

**例7：**甲仓库原来有存粮吨，运走了吨后，此时甲仓库的粮食恰好为乙仓库存量的，则乙仓库的存量有多少吨？

**例8：**一本笔记本的单价是2元，恰好是2本相同A型字典的价格的，那么这种A型字典每本的价格是多少元？

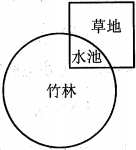
**例9：**一根铁线第一次用去，第二次用去米，还剩下全长的一半.求这根铁线全长多少米？

**例10：**工程队修一条公路，第一天修了全长的，第二天修了第一天的，这是还剩下650米没修，问：这条公路全长多少米？

**例11：**超市运来一批可乐，第一周卖出全部的，第二周的销售量比第一周多，两周后还剩下8箱可乐未出售，则这批可乐共有多少箱？

**例12：**某水果店运来橘子、苹果和香蕉共750千克，香蕉的重量是橘子重量的，橘子的重量是苹果的重量的，问：运来香蕉多少千克？

**例13：**一桶油用去它的后，再倒入千克，这时桶内的油恰好是原来的，这桶油原来有多少千克？

**例14：**如图是某园林的规划图，其中正方形的是草地，圆的是竹林.已知竹林比草地多占450平方米，水池占地多少平方米？

**例15：**某校举办一次作文竞赛，设一、二、三等奖若干名，竞赛结果，获一、二等奖的占获奖人数的，获二、三等奖的占获奖人数的，获二等奖的人数占获奖人数的几分之几？

**例16：**（1）某班级有学生48人，其中女生占全班人数的，现在女生增加若干人，这样女生人数就占全班人数的，求增加的女生的人数.

（2）某校派出60名选手参加市少年田径赛，其中女选手占 .正式比赛时，有几名女选手因病缺席，这样就使女选手人数变为正式参赛选手总数的，求正式参赛的女选手人数.

（3）某校派出若干名选手参加市少年田径赛，其中女选手占 .正式比赛时，有3名女选手因病缺席，这样就使女选手人数变为正式参赛选手总数的，求正式参赛的女选手人数.

**例17：**甲、乙、丙、丁合做一批零件，甲做的个数是其他三个人工作总量的一半，乙做的个数是其他三个人工作总量的，丙做的个数是其他三个人工作总量的，丁做了390个，则四个人共做了多少个零件？

第9讲 分数应用题（二）

1. **常见的应用题类型及公式：**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **问题** | | **基本公式** |
| **行程问题** | **相遇问题** | **相遇时间＝路程÷速度和** |
| **追击问题** | **追击时间＝路程÷速度差** |
| **工程问题** | | **工作效率＝工作总量÷工作时间** |
| **盈亏问题** | | **利润＝售价－成本；亏损＝成本－售价** |

* **行程问题**

**例1：**一条铁路线全长是168千米，一列火车行了全程的后，还要行24分钟到达终点，这列火车每小时行多少千米？

**例2：**小王、小明两人开车同时从两地相对出发，小王走完全程的时与小明相遇，小明以每小时10千米的速度继续前进，用2.5小时走完余下的路程，求小王的速度.

**例3：**一列快车从甲城开往乙城要10小时到达，一列慢车从乙城开往甲城要15小时到达，两车同时从两城出发，相向而行，相遇时距离两城中点60千米，则甲、乙两城相距多少千米？

* **工程问题**

**例4：**一台A型机器人，8天能卸完全部货物的一半.如果再调来一台B型机器人，两台一起卸，只用两天就可卸完余下的货物.求B型机器人的工作效率.

**例5：**一本书稿，由甲打字要用48小时完成，由乙打字要用52小时完成，现在先由甲、乙合作打字12小时，余下的部分由乙一人完成，还需要多少小时？

**例6：**某机床厂加工一批零件，甲、乙合作24天可以完成.现在由甲先做16天，然后乙再做12天，还剩下这批零件的没有完成.已知甲每天比乙多加工3个零件，求这批零件的个数.

**例7：**甲、乙、丙三人承包一项工程，发给三人工资共1800元.三人完成这项工程任务的具体情况是：甲、乙两人合作6天完成了工程的，乙、丙合作2天又完成了工程的，最后三人合作5天完成了这项工程.如果按完成工作量的多少来付酬，每人应得工资多少元？

* **盈亏问题**

**例8：**2017年初，某小区平均房价为每平方米11000元，到2018年初，每平方米房价比原来上涨了.问：(1)2018年初的售价平均每平方米多少元？(2)若买房需缴纳的契税为房价的，则买一套100平方米的房子按2017年初的价格共应付多少元？

**例9：**商场促销，所有商品全部降价.毛衣原价800元，每件可赚200元，现商家先提价，再按照商场的折扣降价，那么促销后每件可赚多少钱？

**例10：**某商店两件衣服均卖了100元，其中一件赚了，而另一件亏了，这两件衣服合在一起是赚了还是亏了？赚或亏了多少？

第10讲 分数的拆分

**知识梳理**

* 分数的拆分概念：把一个分数拆成几个分数的和或差的形式，一般都是拆分成几个单位分数的和或差的形式；
* 单位分数：分子是1，分母是大于或等于2的自然数的分数；
* 分数拆分的方法：

**⑴单位分数的拆分**

①将一个单位分数拆分成几个不同的单位分数之和的形式

* **公式法：**

由-可知= +

**例1：**利用上述结论将下列几个分数拆成两个不同单位分数之和

* **分母约分法**

把分数拆成+的形式，方法和步骤是：

1. 写出A的所有因数，并从中挑出2个因数a1,a2；
2. 的分子、分母同时乘以(a1+a2)，得到**= **；
3. 拆分：=+

(4)约分：把所得的两个分数约分，得到要求的结果

**例2：**（1）请在□内填入适当的自然数，使等式成立.问：共有几种不同的填法？

（2）在括号内填上适当的自然数（必须互不相同），使等式成立.

* **先扩后拆法**

将一个单位分数的分子与分母扩大一定倍数后，若能将它的分子拆成几个正整数之和，且这些正整数为分母的因数，则可将这个单位分数拆成几个不同的单位分数之和.

**例3：**利用上述结论将下列几个分数拆成两个不同单位分数之和

**  **

②将一个单位分数拆分成两个不同的单位分数之差的形式

* **公式法：**

- ； = -

**例4：**（1）利用上述结论将下列几个分数拆成两个不同单位分数之和

（2） + + + + + + + +

（3） + + + +

* **分母约分法**

把分数拆成—的形式，方法和步骤是：

1. 写出A的所有因数，并从中挑出2个因数a1,a2；
2. 的分子、分母同时乘以(a1—a2)，得到**= **；
3. 拆分：=—

(4)约分：把所得的两个分数约分，得到要求的结果

**例5：**写出4个形如 - 的表达式（其中a、b为自然数）

（2）真分数的拆分（不包括单位分数）

**①将一个真分数拆分为几个不同的单位分数之和**

* **分母约分法**

把分数（B≠1）写成**的形式，方法和步骤是：

1. 写出A的所有因数，并从中挑出2个因数a1,a2，并且a1+a2是B的倍数；
2. 的分子、分母同时乘以a1+a2，得到**= ；
3. 拆分：=+；
4. 约分：把所得的两个分数约分，得到要求的结果

**例6：**(1)求出的所有形如的表达式，其中a、b是自然数，并且没有互为因数.

(2)请在□内填入适当的自然数，使等式成立.问：共有几种不同的填法？

* **先扩后拆法或直接拆分法：**

将一个真分数的分子与分母扩大一定倍数后，若能将它的分子拆成几个正整数之和（或直接将分子拆分成几个正整数之和），且这些正整数为分母的因数，则可将这个真分数拆成几个不同的单位分数之和.

**例7：**（1）拆分成三个不同的单位分数的和.

（2）把拆分成三个不同的单位分数的和.

（3）把拆分成四个不同的单位分数的和.

**②将一个真分数拆分为两个不同的单位分数之差**

* 写成

1. 写出A的所有因数，并从中挑出2个因数a1,a2，并且a1—a2是B的倍数；
2. 的分子、分母同时乘以a1—a2，得到**= ；
3. 拆分：=—；

(4)约分：把所得的两个分数约分，得到要求的结果

**例8：**求出的所有形如的表达式，其中a、b是自然数.

第11讲分数单元测试

时间40分钟 满分100分

1.比较下列各组数的大小并写出判断过程.（每小题4分，共16分）

（1） (2)

（3） （4）和

2.**简便计算**. （每小题4分，共52分）

(1)

(2)

(3)

(4)＋＋＋…＋

(5)＋＋＋…＋

(6)1＋＋＋＋＋＋

(7)﹣＋﹣＋﹣

(8)

(9)()×()

(10)

(11)

(12)4×2＋8×14﹣4×14

（13）

3.计算（第1小题6分 ，2,3小题每题8分，共22分）

（1）0.1＋0.＋0.125＋（结果写成分数形式）

(2) (3)1－

**4.应用题**（每题5分，共10分）

（1）甲、乙两个班级，乙班的人数比甲班少，在甲班中女生人数比男生人数少，而在乙班中女生人数则比男生人数多，则甲班的女生占乙班女生的几分之几？

（2）某校派出若干名选手参加市少年田径赛，其中女选手占 .正式比赛时，有3名女选手因病缺席，这样就使女选手人数变为正式参赛选手总数的，求正式参赛的女选手人数.

第12讲 比和比例

**问题1** 小明和小杰在篮球场上定点投篮，小明投了15次，进球6次，小杰投了10次，进球5次.谁的投篮水平高?

* 比的定义：

①若、表示两个数或两个同类的量，将、相除，叫做比，或与的比.记作“”，也可写成，其中.即.其中叫做比的**前项**，叫做比的**后项**.前项除以后项的商叫做**比值**.

例如：15 ∶ 10 =15÷10= (比值通常用分数表示，也可以用小数或整数表示)

前项 比号 后项 比值

②区分比和比值

**比：**表示两个数的倍数关系学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！，可以写成比的形式，也可以用分数表示. 比是一个有序的概念，有比的前项和比的后项，不能颠倒.

**比值：**相当于商，是一个数，是一个结果，可以是整数，分数，也可以是小数.

**例1:**某班有男生23人，女生22人，

求：（1）男生人数与女生人数比；

（2）女生人数与全班人数的比.

**解 因为某班有男生23人，女生22人，**

**所以全班有（人）.**

**（1）男生人数与女生人数比（也可以写成）.**

**（2）女生人数与全班人数的比（也可以写成）.**

**答：（1）男生人数与女生人数比为.（2）女生人数与全班人数比为.**

**例2:**求下列各比的比值.

（1）； （2）； （3）30分钟小时；

（4）4千克克； （5）125毫升升. (6)7.5cm∶40mm；

解 （1）；

（2）；

（3）30分钟小时；

（4）4千克克；

（5）125毫升升.

**Ps:求两个同类量的比值时，若单位不同，必须把单位化成相同单位.**

**问题2**  比、除法、分数有什么联系和区别？

联系：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 除法 | 被除数 | （除号） | 除数 | 商 |
| 分数 | 分子 | （分数线） | 分母 | 分数值 |
| 比 | 前项 | （比号） | 后项 | 比值 |

从上表中可以看出：比,分数和除法三者之间的关系是：比的前项相当于分数的分子和除式中的被除数；比的后项相当于分数的分母和除式中的除数；比值相当于分数的分数值和除式中的除式中的商；

区别：比是表示两个数关系的式子，分数是一个数，除法是一种运算.

* **比的基本性质：比的前项和后项同时乘或除以相同的数（零除外），比值不变.**运用这个性质可以将比化成最简整数比.**比的前项和后项都是整数且互素，这样的比叫做最简整数比**.

以后比的结果都必须化成最简整数比.

因为.根据分数的基本性质，可得



**例3：**将下列各比化成最简整数比：

（1）； （2）；

（3）； （4）1.5小时小时50分.

解 （1）；

（2）；

（3）；

（4）1.5小时小时50分分钟分钟.

**练习**

1.选择题：

（1）下列各数中，与不相等的是（ ）.

（A）1.5 （B） （C） （D）

（2）把10克盐完全溶解在90克水中，则盐与盐水的重量比是（ ）.

（A） （B） （C） （D）

2.求下列各比的比值：

（1）； （2）；

（3）375毫升升； （4）18小时天

**问题3** 一种糕点的部分配料是30克可可粉,10克白砂糖,20克奶粉.其中可可粉和白砂糖的比是30：10，白砂糖与奶粉的比是10：20.由此可以说可可粉,白砂糖, 奶粉的比是30：10：20.像这样的比叫做三个数的连比又叫三项连比又叫三连比，其中30,10,20都是这个连比的项.在比较两个以上量时，往往可以采用连比.

* **三项连比的性质：**

1.如果，，那么.

2.如果，那么= : :

**注意：三个数的连比是有序的.**

**例4：**（1）已知a:b=2:3，b:c=3:5，求a:b:c.

（2）已知a:b=2:3，b:c=6:5，求a:b:c.

（3）已知a:b=2:3，b:c=4:5，求a:b:c.

（4）已知a:b=3:4，b:c=3:5，求a:b:c.

（5）已知a:b=:，b:c=3:2，求a:b:c.

（6）已知a:b=0.2:0.3，b:c=:，求a:b:c.

**例5：** 将下列各比化成最简整数比：

（1）； （2）15：30：40

（2）：： （3）：： （4）0.4：0.6：0.16

分析 新分数约分后是，即新分数分子和分母的比是，分子是2份，分母是3份，分子和分母的和是5份.分子加23，分母加32后，新分子和分母之和是，即一份是，所以新分数的分子是，分母是，那原分数的分子是，分母是.

解 因为新分数的分子，

新分数的分母，

所以原来的分数.

**练习**

1.化简比：120分钟小时小时20分钟.

2.根据已知条件，求：.

解 （1）

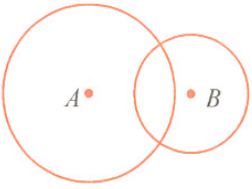
.

（2）.

（1）a:b=3:7，b:c=:； （2），.

（3），.

3.（1）如图，圆的与圆的重叠在一起，求圆面积与圆面积之比.



分析 重叠部分是圆的一部分，重叠部分的面积圆的面积；重叠部分又是圆的一部分，重叠部分的面积圆的面积，通过连比的方法即可得出圆面积与圆面积之比.

解 因为重叠部分的面积圆的面积，

重叠部分的面积圆的面积，

所以，重叠部分的面积圆的面积圆的面积.

所以，圆的面积圆的面积.

例7 学校买来540本书，按4：5借给六、七年级，每个年级各借多少本？

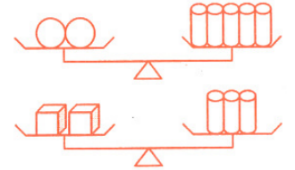
分析 把比当份数，求出每份.六年级占4份，七年级5份，总共9份，每份是（本），那么六年级借了：（本），七年级借了：（本）.

解 六年级借了：（本），

七年级借了：（本）.

答：六年级借了240本，七年级借了300本.

（2）如图所示，有三种物体：圆球、圆柱、正方体，每一种物体的大小、质量相同.若两个天平都平衡，三个球体的重量等于几个正方体的重量？



**问题4**  若学校操场上升起的国旗的长是1.8米，宽是1.2米.教室里挂的国旗的长是45厘米，宽是30厘米.这两面国旗的长与宽的比是否相等？

* **比例和比例的基本性质**

**①比例**

答案：因为1.8米米，

45厘米厘米，

所以 1.8米米厘米厘米.

，，，四个量，如果，那么就说，，，成比例，也就是表示两个比相等的式子叫做比例.其中，，，分别叫做第一，二，三，四比例项，第一比例项和第四比例项做**比例外项**，第二比例项和第三比例项叫做**比例内项**.

如果一个比例的两个比例内项相同，即a:b=b:c,那么我们把b叫做a和c的**比例中项**.

比如，则1.8， 1.2，45，30分别叫做第一，二，三，四比例项，其中1.8和30是比例外项，1.2和45是比例内项.

比如4：2=2：1，其中2是4和1的比例中项.

**例6：**填空

（1）2：3=4：6，比例内项是\_\_\_\_\_\_\_\_\_，比例外项是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（2）7：14=14：28，\_\_\_\_\_\_ 是 \_\_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_\_ 的比例中项.

**②比例的基本性质：**

如果或，那么.反之，如果、、、都不为零，且，那么或.**两个外项的积等于两个内项的积**.

也可以表示为，在的等式两边同时乘以，可以得到；反过来在的等式两边同时除以，就可以得到，其中，，，都不为零.

Ps: 称为等积式.或称为比例式.

**注意：比和比例的联系与区别：**

联系：比和比例有密切的联系，比例是由两个比值相等的比组成的，如果两个比的比值相等，那么这两个比就可以组成比例，能组成比例的两个比，它们的 比值一定相等.例如



区别：比表示两个数相除，有两项；比例是一个等式，表示两个比相等，有四项.

**例7：**下列各组数中，哪一组数能组成比例？

（1）2，3，4，6； （2）1，2，2，4；

（3）0.1，0.3，0.5，1.5； （4），，，

**解 因为2是和5的比例中项，**

**所以，由比例的基本性质得，**

**即.**

**例8：**求下列各式中的

（1）； （2）. （3）.

（4）x∶4.8＝5∶2 （5）15∶x＝1.2∶1.5

（6）2∶（2x﹣1）＝3∶（x＋3） （7）x∶1＝6∶2

**家庭作业：**

1.将下列各比化成最简整数比：

（1） ： ； （2）3: (3)；

2.填空：

（1）在比例中，如果，，那么\_\_\_\_\_\_\_.

（2）4：3的前项扩大3倍，后项缩小3倍，那么比值变成\_\_\_\_\_\_\_\_.

（3）若，那么= \_\_\_\_\_\_\_.

（4）15：9的前项减去10，要使比值不变，后项应变为 \_\_\_\_\_\_\_.

（5）（）（）如果2是x和5的比例中项，那么\_\_\_\_\_\_\_\_.

3.求*x*的值：

（1）； （2）；

4.某中学460名学生分成三组参加植树活动，第一组与第二组人数比是，第一组与第三组人数比是，第三组比第二组多多少人？

第13讲 比例的应用

* **比例关系**：

两个相互依赖的量，如果其中的一个量扩大（或缩小）若干倍，另一个量也相应地扩大（或缩小）相同的倍数，这两个量叫做成正比例的量.它们中的变化关系叫做**正比例关系**.

比如：路程=速度时间，在速度不变的情况下，时间扩大一定的倍数，路程也扩大相同的倍数.所以在速度不变的情况下，路程与时间的关系是正比例关系.

解 设汽车要行使小时.

可得，

解得，.

答：汽车要行驶24小时.

两个相互依赖的量，如果其中的一个量扩大（或缩小）若干倍，另一个量反而缩小（或扩大）相同的倍数，这两个量叫做成反比例的量.它们中的变化关系叫做**反比例关系**.

比如：路程=速度时间，在路程不变的情况下，速度扩大一定的倍数，时间则也缩小相同的倍数. 所以在路程不变的情况下，时间与速度的关系是反比例关系.

* 比例尺＝图上距离：实际距离

**例1：** 若，求：：.

**分析 根据比例的基本性质可以先列出，.然后写出，，的比.**

**解 因为；，**

**所以；，**

**所以.**

**答：，，的比是.**

**例2：**将12本厚度相同的书叠起来，他们的高度为27厘米，将28本同样的书叠起来，高度是多少厘米？

分析 先确定每本厚度是多少，然后求出28本书叠起来的高度.也可以设28本同样的书叠起来高度是厘米.

|  |  |
| --- | --- |
| 书的本数 | 叠起的高度 |
| 12 | 27 |
| 28 |  |

**由书的本数与叠起的高度的关系得，解得即可.**

**解 方法一：每本厚度是（厘米/本）**

**28本同样的书：（厘米）**

**方法二：设28本同样的书叠起来高度是厘米.**

** **

**得.**

**答：28本同样的书叠起来高度是63厘米.**

**也可以列出，……**

**例3：**某机床厂制造一批机床，3天生产了21台，结果再生产12天就完成了任务.这批精密机床有多少台？

**分析 由3天生产了21台，可得出12天生产的台数.这批精密机床一共生产了（天）.**

**解 设这批精密机床有台，**

**可得，**

**.**

**答：这批精密机床有105台.**

**例4：**在一幅比例尺是的地图上，量得甲、乙两城市距离是7厘米，那么、两城市之间的实际距离是多少千米？（比例尺＝图上距离：实际距离）

**例5：**小杰乘81路公交车从家里去学校用了16分钟，放学回家乘81路公交车用了19分钟，那么小杰上学、放学所用的时间比、速度比各是多少？

**例6：**一个三角形的三条边是10cm，12cm，15cm，求这个三角形三条边上的高之比.

**例7：**学校买来540本数，按4:5借给六、七年级，每个年级各借多少本？

**例8：**一个分数，分子和分母之和是100，如果分子加23，分母加32，新分数约分后是，原来的分数是什么？

**例9：**一家水果店运来一批水果共45箱，其中苹果与香蕉的箱数比是5∶4，香蕉与橘子的箱数比是2∶3，求这家水果店运来苹果、香蕉、橘子各多少箱？

**例10：**A、B和C三名同学共有147元钱，A用了自己钱数的，B用了自己钱数的，C用了自己钱数的，各买了一支相同的钢笔.那么，三人原来各有多少元钱？

**家庭作业**

1.一幅地图，图上的4厘米，表示实际距离200千米，这幅图的比例尺是多少?

2.甲、乙两地相距240千米，画在比例尺是1∶3000000的地图上，长度是多少厘米?

4.一辆汽车2小时行驶130千米。照这样的速度，从甲地到乙地共行驶5小时。甲、乙两地相距多少千米?

5.6台榨油机每天榨油48.6吨，现在增加了13台同样的榨油机，每天共榨油多少吨?

6.一某工厂要生产一批机器零件，5天生产410个，照这样计算，要生产1066个机器零件需要多少天?

7.3.34 甲、乙两个服装厂，日生产西服的数量比是，两个厂生产的西服单价的比是.那么这两个厂的产值的比是多少？

8.一水果店采购进一批橘子和苹果，其中橘子和苹果的单价比是，橘子和苹果的重量比是，这两种水果共花去2320元，问橘子比苹果多花多少钱？

第14讲 百分比的意义

**课前思考**

我国许多地区都不同程度遭到沙尘暴的袭击．植树造林，扩大植被面积是防止沙尘暴的方法之一．下表列出了某一地区不同树种的种植成活情况．请你判断选择哪种比较好．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 名称 | 栽树总棵数 | 成活棵数 | 成活棵数与栽树总棵数的比 |
| *A* | 20 | 17 |  |
| *B* | 25 | 23 |  |
| *C* | 50 | 42 |  |
| *D* | 10 | 8 |  |

从表中不容易看出哪一种树的成活情况比较好，如果将成活棵数与栽树总棵数的比都用分母为100的分数表示，就很容易作出判断了．

因为，所以选择树种*B*种植比较好．

**知识梳理**

**1．百分数**

* **概念：**把两个数量的比值写成的形式，称为百分数，也叫做百分比或百分率. 记作*n*%，读作百分之*n*. 符号“%”叫做百分号.**百分数的计数单位是1%，是百分之几就表示有几个1%**.比如：37%表示有37个1%.

例如：42%就是，读作百分之四十二；125%就是，读作百分之一百二十五.

**例1：(1)读出下面各百分数．**

①1%； ② 68%； ③0.37%； ④1.04%； ⑤200%； ⑥246.5%.

答案：①百分之一；②百分之六十八；③百分之零点三七；④百分之一点零四；⑤百分之二百；⑥百分之二百四十六点五.

**(2) 写出下面各百分数.**

百分之五； 百分之二百； 百分之三点九； 百分之八十五；

百分之五十； 百分之一百二十五； 百分之零点六四； 百分之零点零五.

* **百分数的意义**

百分数是一种特殊的倍比关系，它的后项是一个固定的数100，表示一个量是另一个量的百分之几.

百分数是一种特殊的分数，它只表示两个数量之间的倍数关系，百分数后面不带单位名称.

百分数是分母为100的特殊分数，既能直观地反映部分与总体的关系，又便于比较，因此在工农业生产和生活中运用比较广泛．例如，近十余年来上海市市区绿化状况发生了可喜的变化，可以用百分数来描述：绿化覆盖率在近十余年中从2%上升到2003年底的26%．

**例2：**(1)下面的这些分数哪个能写成百分数？哪个不能？说说为什么？

(1)六一班的同学中男同学的人数占. (2)一个苹果重千克.

(3)一堆煤重吨，运走它的. (4)米相当于米的.

答案：(1)48%. (2)不能.

(3)不能写成百分数；32%. (4)，不能写成百分数；50%.

(2)判断题.

(1) 吨=50%吨. (× )

(2) 最大的百分数是100%，最小的百分数是1%. (× )

(3) 百分数的意义与分数的意义完全相同. (× )

(4) 百分数的计数单位是1%. (√ )

(5) 分母是100的分数叫做百分数. (× )

(6) 34%读作百分之三四. (× )

(7) 一杯牛奶重25%千克. (× )

(8) 女生人数是全班人数的45%. (√ )

**2．百分数、分数和小数之间的互化**

* **小数或整数化成百分数的规律：**

小数化成百分数，将小数点向**右**移两位，同时在右面**添上**百分号.

**例3：**将下列小数或整数化成百分数：

(1)0.47； (2)0.028； (3)2.73； (4)0.3； (5)1.

* **百分数化成小数或整数时的规律：**

百分数化成小数，将%号前数字的小数点向**左**移两位，同时**去掉**后面的百分号.

**例4：**将下列百分数化成小数或整数：

(1)6%； (2)125.2%； (3)0.52%； (4)200%.

答案：==36%；==25%.

* **(3)百分数化成分数**

百分数化成分数，将百分数改写成**分母是100，分子是%前面的数的**的分数，再进行**约分**.

**例5：**将下列百分数化成最简分数：

(1)62%； (2)55%； (3)37.5%； (4)125%.

解：(1)

百分数化成最简分数：把百分数改写成分母是100的分数，再进行约分.

30÷40的运算结果可以表示成：.

在实际生活中，应根据不同的情形选择不同的表示形式．如，用30元钱买40只猕猴桃，通常用0.75元表示每只猕猴桃的价格．又如，通常用75%或表示一个班级的40位学生中有30位学生喜爱数学．因此，掌握百分数、分数和小数之间的互化是必要的．

**(4)分数化成百分数**

分数化成百分数，通常先把分数化成小数，再把小数化成百分数.

**例6：**将下列分数化成小数，再化成百分数(除不尽的在百分号前保留一位小数)：

．

**例7：计算：**

(1)； (2)；

(3)； (4).

**练习**

1．用百分号表示下列各百分数：

(1)百分之二十； (2)百分之一百二十；

(3)百分之一点三； (4)百分之零点一.

答案：(1)20% (2)120% (3)1.3% (4)0.1%

2．把下列各小数化成百分数：

(1)0.2； (2)0.04； (3)0.137； (4)13.25．

答案：(1)20% (2)4% (3)13.7% (4)1325%

3．把下列各百分数化成小数：

(1)8%； (2)30%； (3)0.27%； (4)121%．

答案：(1)0.08 (2)0.3 (3)0.0027 (4)1.21

4．把下列各分数先化为小数，再把所得的小数化为百分数(除不尽的在百分号前保留一位小数)：

(1)； (2)； (3)； (4)．

答案：(1)0.25； 25%；(2)1.4； 140%； (3)； 66.7%； (4)0.4；40%.

5．将下列百分数化成最简分数：

(1)0.01%； (2)12.5%； (3)120%； (4)250%．

答案：(1) (2) (3) (4)

答案：(1)0.08 (2)2.5 (3)32.5 (4)0.495

**家庭作业**

一．填空

1.37%的计数单位是（ ），它有（ ）个这样的单位。

2.六年级一班跳绳测验全部合格，可以用百分数（ ）来表示。

3.把5.6%的百分号去掉，这个百分数就会扩大（ ）倍。

4.把下面各组数从小到大排列。

（1）6.5% 650% 0.06 0.65 （2）2.75 27.5% 270% 2.57

5.在括号里填上“＞”、“＜”或“＝”。

0.67( )67% 31.3( )313% 260%( )2.6 ( )100%

1% ( )0.1 0.25( )25% 50%( )  0.3( )0.3%

二．计算：

(1)； (2)；

(3)； (4)．

三．求下列各式中的x

=x∶3 2．0.5∶0.3=0.6∶x

3．x∶27=∶12 4．∶x=7∶20%

第15讲 百分比的应用(1)[基本问题、统计问题]

**知识梳理**

* **基础知识**

求百分比(或百分率)的问题与“求一个量是另一个量的几分之几”的问题类似，只是要求结果用百分数表示.

**①求甲数是（或占或相当于）乙数的百分之几，甲数÷乙数×100%.**

**例1：**某学校图书馆有小说书8000本，历史书3000本，科技书5000本.求：(1)小说书占图书馆图书总数的百分之几？(2)历史书相当于科技书的百分之几？

**②求甲数的百分之几是多少：甲数×百分之几=甲数的百分之几所对应的量.**

**例2：**某学校图书馆有小说书8000本，其中80%是科幻小说，求科幻小说有多少本？

**③已知甲数的百分之几是乙数，求甲数：乙数÷百分之几=甲数**

**例3：**已知一个数的75%是840，求这个数？

**④已知甲数，乙数比甲数少百分之几，求乙数：乙数=甲数×（1百分之几）**

**⑤已知甲数，乙数比甲数多百分之几，求乙数：乙数=甲数×（1百分之几）**

**例4：**(1)如果甲数比乙数小25%，甲数是200，那么乙数是多少？

(2) 如果甲数比乙数小25%，乙数是200，那么甲数是多少？

(3) 如果甲数比乙数大25%，甲数是200，那么乙数是多少？

(4) 如果甲数比乙数大25%，乙数是200，那么甲数是多少？

**⑥已知甲数大于乙数，求甲数比乙数多百分之几：(甲数乙数) ÷\_\_\_\_\_\_\_\_×100%**

**⑦已知甲数小于乙数，求甲数比乙数少百分之几：(乙数甲数) ÷\_\_\_\_\_\_\_\_×100%**

**例5：**某学校图书馆有小说书8000本，历史书3000本，科技书5000本.求：小说书比科技书多百分之几？历史书比科技书少百分之几？

* **常见的百分率问题**

“率”就是两个数相除的商所化成的百分数.

常见的百分率有：及格率、合格率、增长率、优良率、出勤率、盈利率、亏损率等等.

**①及格率=×100%, 及格率 + 不及格率 = 1**

**例6：**(1)A班有学生45人，上学期期末跳远测验有36个学生及格.求及格率？

(2)B班上学期期末跳远测验有32人及格，及格率是80%，求*B*班有多少人？

(3)C班有学生35人，及格率是80%，求*C*班有多少人？

**②合格率=×100%，不合格率= ×100%， 合格率 + 不合格率 = 1**

**例7：**（1）汽车配件厂每天生产汽车零件1000个，其中次品有25个，求产品的合格率.

（2）某工厂生产一批汽车零件，经检验合格率是98%，不合格零件共98件，求这批汽车零件中合格的零件数.

分析1 由合格率是98%，可知不合格率为，



求得零件总数，

合格的零件数零件总数合格率.

解法一 不合格率为，

零件总数(件)，

合格的零件数零件总数合格率(件).

答：这批汽车零件中合格的零件数是4802件.

分析2 不合格零件数合格零件数，

利用比例的基本性质即可求得合格零件数.

解法2 因为 不合格零件数合格零件数，

所以 合格零件数(件).

答：这批汽车零件中合格的零件数是4802件.

**③出勤率=×100% ，出勤率 + 缺勤率 = 1**

**例8：**在流感爆发的季节里，学校要求每个班级上报每天的出勤率，某天六(1)班实到39人，有11人请病假，求这天六(1)班的出勤率．

**④增产率= ×100%**

**例9：**(1)某工厂二月份生产机器300台，三月份生产机器390台，求三月份的增产率是多少？

(2)某工厂二月份生产机器200台，三月份增产10%，求三月份生产多少台机器？

(3)某工厂三月份比二月份增产**一成二**，多生产24台机器，求二月份、三月份共生产多少台机器？

**例10：**某机床厂今年计划生产2200台数控机床，比去年增产200台.求今年计划比去年增产百分之几？

**⑤增长率=×100% →现在的数=原来的基数×(1+增长率)**

**下降率= ×100% →现在的数=原来的基数×(1下降率)**

**例11：**某地区去年橘子的产量为120万吨，比前年增长了25%，今年又比去年增长了20%，这三年产量共计多少万吨．

**例12：**某市今年第二季度的工业总产值为100亿元，比第一季度增长了6.2%，预计第三季度的增长率在第二季度的基础上将提高1个百分点，预计第三季度的工业总产值多少亿元.答案：360

**例13：**一汽车销售公司，今年2月份销售了300辆*A*型汽车，3月份销售了*A*型汽车的数量比2月份下降了20%，预计4月份的销售数量要比3月份下降10个百分点，求：

(1)这个销售公司，今年3月份销售了*A*型汽车多少辆？

(2)今年4月份这个销售公司将销售*A*型汽车多少辆？

(3)4月份比2月份销售情况下降了百分之几？

* **统计问题**

(1)统计图的类型与识图：由扇形统计图、条形统计图、折线统计图得到有用的信息.

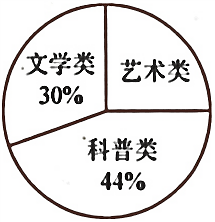
(2)统计图表的应用.

**例13：** 某学校图书馆有科普类、文学类及艺术类三种图书若干册，其中文学类图书有3600册，三种图书所占比例如图所示.

求：①艺术类图书共占全部图书的百分之几？

②艺术类图书有多少本？

③该校这三种图书共有多少本？



分析 因为文学类图书有3600册占三种图书总数的30%，

所以三种图书总数(本).

艺术类图书共占全部图书的，

艺术类图书有(本).

也可以利用比例的方法，即艺术类图书文学类图书，

艺术类图书有(本).

解 艺术类图书共占全部图书的，

三种图书总数(本)，

艺术类图书有(本).

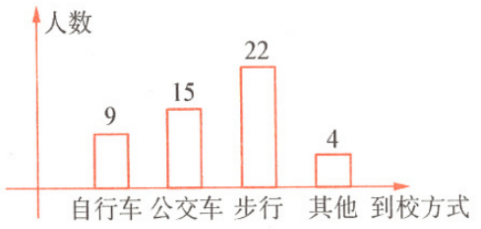
答：①艺术类图书共占全部图书的26%；②艺术类图书有3120本；③该校这三种图书共有12000本.

**例14：**如图是一学校某班学生到校方式调查图.根据图表中的数据，分别计算：

(1)步行到校的人数占学生总人数的百分之几？

(2)骑自行车到校的人数占坐公交车到校的人数的百分之几？

(3)坐公交车到校的人数比骑自行车到校的人数多百分之几？



**家庭作业**

1.光明中学六、七、八年级学生参加义务植树活动，栽树棵数依次为68棵、76棵、96棵，其中没有成活的棵数依次为1棵、2棵、3棵，求三个年级学生栽的这批树的成活率.

2.用2000千克花生仁榨出花生油760千克，求花生仁的出油率.

3.某射击运动员一次训练时，一共打了5组子弹，每组10发子弹，其中有3发子弹没有命中目标.求射击运动员训练时的命中率.

分析 出油率出油的重量花生仁的总重量.

解 .

答：花生仁的出油率为38%.

4．六(1)班学生数学期末考试测验的成绩统计如下：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 成绩 | 100分 | 99~90分 | 89~80分 | 79~70分 | 69~60分 | 59分及以下 |
| 人数 | 3 | 12 | 13 | 10 | 4 | 3 |

若本次考试60分以上是及格，90分以上是优秀，求这个班这次数学测验成绩的及格率与优秀率(百分号前保留一位小数)．

答案：及格率是；优秀率是33.3%

分析 ，

命中目标数射击的总数没有命中目标数.

解 .

答：射击运动员训练时的命中率是94%.

5．体育用品商店有篮球和排球共45个，其中篮球占60%，当卖出一批篮球后，篮球是排球的50%，卖出的篮球有多少个？

6．某俱乐部去年有200名男会员，今年男会员人数减少10%，女会员比今年男会员的人数多5%，这个俱乐部现有多少名会员？

第16讲 百分比的应用(2)[盈亏、利税问题]

**知识梳理**

* **盈亏问题**

**①盈利问题**

盈利（利润）=

盈利率=

**例1：**甲商店以每件200元的批发价购得100件衬衫，以每件售价280元卖出. 乙商店以每双300元的批发价购得100双皮鞋，以每双售价390元卖出.

（1）填完下表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 品种 | 成本 | 售价 | 盈利 |
| 衬衫 |  |  |  |
| 皮鞋 |  |  |  |

（2）甲商店和乙商店哪家店的盈利率更大？

**例2：**（1）房产商将每套成本为60万元的住宅以80万元卖出，求盈利率.

（2）一台彩电的售价是4500元，其盈利率为12.5%，求这台彩电的成本价.

（3）一台电脑的成本价是4000元，如果商家以30%的盈利率卖出，求这台电脑的售价.

**②亏损问题**

亏损=

亏损率=

**例3：**甲商店以每件200元的批发价购得100件衬衫，由于质量问题以每件售价180元卖出. 乙商店以每双300元的批发价购得100双皮鞋，由于质量问题以每双售价270元卖出.

（1）填完下表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 品种 | 成本 | 售价 | 亏损 |
| 衬衫 |  |  |  |
| 皮鞋 |  |  |  |

（2）求甲商店和乙商店哪个店亏损率更大？

**例4：**小王在一次股票投资活动中亏损了1000元，其亏损率是10%，求他在这次投资中投入的成本．

**③折扣问题**

折扣率=

**例5：**（1）某商品的原价100元，按原价的八折出售，求该商品的实际售价．

（2）某商品按原价的八折出售，售价是100元，求该商品的原价．

**例6：填空**（填百分数）

（1）九五折就是原价的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（2）八折就是原价的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（3）对折就是原价的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**例7：**一件衣服原价每件380元，如果降价152元后出售，这件衣服额售价打了几折？如果降价到152元后出售，这件一衣服的售价打了几折？

* **利税问题**

到银行存款，可以获得利息.向银行借款（或称贷款），必须支付利息.存放或借取的款项称为**本金**.利息是按本金的某个百分比进行计算的，这个百分比称为**利率**. 利率以一个月为一期的称为月利率，利率以一个年为一期的称为年利率.根据国家规定，到银行存款，存户在获得利息的同时，还需向国家缴纳**20%**的**利息税**.

利息＝本金×利率×期数.

利息税＝利息×20%.

税后利息＝利息－利息税.

本利和＝本金＋利息

税前本利和＝本金＋利息.

税后本利和＝本金＋税后息.

**如如果题目没有“利息要按20%征利息税”，说明该题不用考虑利息税问题.**

**例8：**（1）张先生把10000元存入银行，存期2年，年利率是3%，到期时张先生可取出多少元钱？(利息要按20%征利息税)

（2）小杰将1500元存入银行，月利率是0.11%，存满一年，到期需支付20%的利息税.求到期后小杰可拿到税后利息多少元？

解：一年到期的利息＝1500×0.11%×12＝19.8(元).

支付利息税＝19.8×20%＝3.96(元).

小杰可获得的税后利息＝19.8－3.96＝15.84(元)

也可直接计算：

1500×0.11%×12×(1－20%)＝15.84(元).

答：到期后小杰可拿到税后利息15.84元.

（3）李先生以4.5%的年利率向银行贷款12万元，借期五年，到期时支付的利息是多少元？

**例9：**某银行存款有两种选择：一年期、二年期.一年期存款利率是1.98%，二年期存款利率是2.25%，如果有10000元存入银行两年后取出，怎样存获利较多？

分析 此题不用考虑利息税问题.只须考虑哪种存款方式所得利息最多.(1)一年期存款：第一年存入本金，第二年存入的本金是第一年末从银行取出的所有钱，包括本金10000元和第一年的利息.

(2)二年期存款：二年后取出的钱本金利息.

解 (1)一年期存款：

第一年末总共可以取出的钱本金第一年的利息

(元)，

第二年末总共可以取出的钱新本金第二年利息

(元)；

(2)二年期存款：

二年后取出的钱本金利息

本金本金利率时间

(元).

因为 ，

所以存二年期存款获利较多.

答：存二年期存款获利较多.

**例10：**（1）2004年初某债券的年利率是3%，当时小明认购了1500元，2008年初到期.请问：到期可得利息多少元？本利和是多少？

（2）某商场今年营业额是1500万元，如果按营业额的5%缴纳营业税，该商场今年应缴纳多少万元营业税？

解 营业税营业额父税率(万元).

答：该商场今年第三季度应缴纳营业税75万元.

（3）一公司去年获得利润205万元，规定须按33%的税率纳税，该单位去年纳税多少万元(精确到万元).

解：205×33%≈68(万元).

答：该单位去年纳税68万元.

**总结：成数、百分点、折**

“几成”就是百分之几十.例如，某工厂今年产值比去年增加一成，表示增产一成，就是增产10%.

1个百分点相当于1%，它是分析百分比增减变动的一种表现形式.

“折”就是原价的十分之几.九五折就是原价的95%；八折就是原价的80%；对折就是原价的50%.

**家庭作业**

1.一台汽车模型的成本价为120元，若商家准备盈利15%，则售价为多少元？

2.一台数码产品售价1500元，第一次打八折后仍盈利180元，求这台数码产品的成本.

3.一种商品若以180元卖出就亏本10%，若要盈利15%，应标价多少元？

4.一家饭店十月份的营业额约是30万元.如果按营业额的5%缴纳营业税，这家饭店十月份应缴营业税约多少万元？

5. 春节期间一服装店同时以210元的价格出售两种羊毛衫，其中一件盈利40%，另一件亏损40%，问最终商家是盈利的还亏损的？盈利或亏损的金额是多少？

第17讲 等可能事件

**课前思考**

判断下列现象会不会出现：

（1）上海明天会下雨

（2）将要过马路时，恰好遇到红灯

（3）室温低于-5时，盆内的水结成了冰

（4）有人把石头孵成了小鸡思考

1，2，3，4，5，6，7，8是八个形状完全相同的区域.指针旋转后落在这八个区域中的可能性是相同的，而落在区域2内只是其中的一种可能，所以指针落在区域2内的可能性的大小为

用大写字母*P*表示可能性的大小，指针落在区域2内的可能性的大小为.也可用百分比表示：*P*=12.5%.

把指针绕着圆盘中心旋转，指针落在某一个区域内看作一个事件，可以知道这个事件发生的所有可能的结果数是8，而这些结果的可能性是相等的，所以指针落在区域2发生的结果数是1.

**知识梳理**

* **事件**

上面列举的现象，（1）和（2）可能出现也可能不出现；（3）必定出现；（4）必定不出现.

**①随机事件:**我们把那些在一定条件下可能出现也可能不出现的现象叫做**随机事件**，也称为不确定事件；

**特点：**(1)结果至少有2个；(2)出现哪个结果，事先并不知道，在一定条件下并不总出现相同的结果.

**②必然事件:**把那些在一定条件下必定出现的现象叫做**必然事件**；

统称为**确定事件**

**③不可能事件:**把那些在一定条件下必定不出现的现象叫做**不可能事件**.

**例1：**判断下列各种事件属于必然事件、不可能事件还是随机事件.

(1)投掷骰子时出现数字7.( )

(2)买一张彩票中大奖.( )

(3)电影票的座位号是偶数.( )

(4)明天太阳从西边升起.( )

(5)从地面往上抛出的篮球会落下.( )

(6)投掷一个硬币后正面朝上.( )

* Image4**等可能事件**

**思考：**如图，将圆盘8等分，指针绕着中心旋转，请问指针落在区域2内的可能性的大小.

分析：1，2，3，4，5，6，7，8是八个形状完全相同的区域.指针旋转后落在这8个区域的可能性是\_\_\_\_\_\_\_的。指针旋转之后有可能落在这8个区域中的任一个区域，也就是说这一事件的结果有8种可能，而落在区域2内只是其中的一种可能，所以指针落在区域2内的可能性的大小是\_\_\_\_\_\_\_.如果用大写字母P表示一个事件发生的可能性的大小，那么指针落在区域2内的可能性的大小可以表示为\_\_\_\_\_\_\_ ，也可以用百分数表示为\_\_\_\_\_\_\_.

**等可能事件：事件可能发生的每一种结果的可能性是相等的.**事先知道所有可能出现的结果，但无法确定出现哪种结果.

等可能事件的某个结果发生的可能性的大小的计算公式：***P*=**.

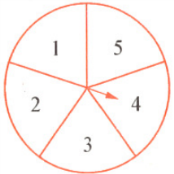
**例3：**如图，圆盘等分成7块，其中有三块红色区域，三块蓝色区域，一块白色区域.指针绕着中心旋转，求指针落在红色区域内的可能性的大小.

Image5解：指针绕着中心旋转，落在区域内所有可能的结果数是7，而指针落在红色区域内的结果数是3，所以

也可以这样理解，红色区域占整个圆区域的，所以指针落在红色区域的可能性的大小是

指针落在蓝色区域内的可能性的大小与指针落在红色区域内的可能性的大小是否相等？

**例4：**如图，一个圆形转盘被等分成五个扇形区域，上面分别标有数字1、2、3、4、5，转盘指针的位置固定，转动转盘后任其自由停止.转动转盘一次，当转盘停止转动时，求：

(1)指针指向标有偶数所在区域的可能性的大小；

(2)指针指向标有奇数所在区域的可能性的大小.

解 (1)指针指向标有偶数所在区域的可能性的大小；

(2)指针指向标有奇数所在区域的可能性的大小.

答：；.

**例5：**一副52张的扑克牌(无大王、小王)，从中任意取出一张，共有52种等可能的结果.

(1)列出抽到*K*的所有可能的情况；

(2)求抽到红桃*K*的可能性的大小；

(3)求抽到*K*的可能性的大小；

(4)抽到黑桃的可能性是多少？

解：(1)红桃*K*、黑桃*K*、梅花*K*和方块*K*共4种.

或者说抽到红桃*K*的可能性的大小约为1.9%. ←

或者说抽到*K*的可能性的大小约为7.7%. ←

(4).

**例6：**掷一枚骰子，求奇数点数朝上的可能性的大小.

**例7：**在一个不透明的抽奖箱子里，共有50个大小、重量相同，但是颜色不同的小球.其中红色球2个，蓝色球5个，黄色球10个，其余都是白色球.现规定：摸到红色的球中一等奖，摸到蓝色的球中二等奖，摸到黄色的球中三等奖，摸到白色的球中鼓励奖.一个人摸了一个球，则他们中各类奖的可能性分别是多大？

解：因为摸到每一个球的可能性是相等的，

所以，中一等奖的可能性为*P*=；

中二等奖的可能性为*P*=；

中三等奖的可能性为*P*=；

由于白球有50-2-5-10=33个，所以中鼓励奖的可能性为*P*=.

**例8：**抛出两枚相同的硬币.求：(1)两枚同时正面朝上的可能性的大小.(2)一枚正面朝上，一枚反面朝上的可能性的大小.

分析：抛出两枚硬币的出现的可能性有以下几种：



解：(1)两枚同时朝上的可能性的大小为：*P*=；

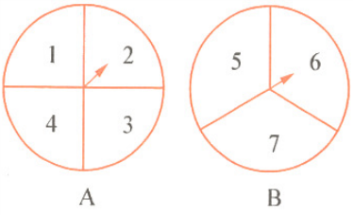
(2)一枚朝上，一枚朝下的可能性的大小*P*=.

**例9：**一只口袋中放着若干只红球和白球，这两种球除了颜色以外没有任何其他区别，袋中的球已经搅匀，蒙上眼睛从口袋中取出一只球，取出红球的可能性的大小是.

(1)取出白球的可能性的大小是多少？

(2)如果袋中的白球有18只，那么袋中的红球有多少只？

**例10：**如图所示，甲、乙两人在玩转盘游戏时，准备了两个可以自由转动的转盘A、B，每个转盘被分成面积相等的几个扇形，并在每一个扇形内标上数字.游戏规则：同时转动两个转盘，当转盘停止后，指针所指区域的数字之和为偶数时，甲获胜；数字之和为奇数时，乙获胜.(如果指针恰好指在分割线上，那么重转一次，直到指针指向某一区域为止)

(1)求乙获胜的可能性的大小；(2)这个游戏规则对甲乙双方公平吗？请判断并说明理由. 

解 (1)；

(2)设袋中的红球有只，则有

，

得 ，.

答：(1)；(2)袋中的红球有6只.

**家庭作业**

答案：(1)50%；(2)公平，两人获胜概率相同.

游戏对双方公平是指双方获胜的概率相等.判断游戏是否公平实质是计算游戏双方获胜的概率是否相等.

答案：****

1．从一副52张扑克牌中(没有大小王)随意抽出一张，

(1)抽到2的可能性大小是多少？ (2)求抽到黑桃2可能性大小是多少？

答案：(1)；(2).

2．对于石头、剪子、布这个传统的游戏，在游戏中，

(1)若你出剪子，能赢对方的可能性是多少？ (2)两人出相同手势的可能性有多大？

答案：(1)；(2).

3．有10个型号相同的杯子，其中一等品6个，二等品3个，三等品1个，从中任取1个，问：

(1)取到二等品的可能性是多少？

(2)取到一等品的可能性是多少？

(3)取到不是三等品的可能性是多少？

答案：(1) (2) (3)

4.(2017·上海中考)不透明的布袋里有2个黄球、3个红球、5个白球，它们除颜色外其它都相同，那么从布袋中任意摸出一个球恰好为红球的可能性的大小是 .

第18讲 比和比例单元测试

（本卷满分100分，完卷时间45分钟）

姓名\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_得分\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**一、填空：（本题满分45分，每空格3分）**

1．求比值10分钟∶20秒=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

2．化简最简整数比=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

3．=\_\_\_\_\_\_\_\_\_（填成小数）=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_% =\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_∶25

4．三角形*ABC*中，若∠*B*=40°，∠*C*=120°，则∠*A*∶∠*B*∶∠*C*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

5．甲、乙两人做相同数量的零件，甲完成需要5小时，乙完成需要6小时，则甲的工作效率与乙的工作效率的比值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

6．20千克比\_\_\_\_\_\_\_\_\_千克轻20%，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_米比5米长．

7．甲数的4倍是乙数的，甲数：乙数=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．存款月利率为0.21%，折成年利率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

9．某工厂生产4320个产品，有12个产品不合格，这批产品的合格率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

10．某商品在促销时期降价10%，促销过后又涨10%，这时商品价格是原来价格的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．（填百分数）

11．一项工作，6月1日开工，原定一个月完成，实际施工时，6月25日完成任务，到6月30日超额完成\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．（填百分数）

12．．三成五用百分数表示为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**二、单项选择题：（本题满分12分，每小题3分）**

1．下列说法正确的是( )

A．0.6比0.5大20% B．0.9%化成小数是0.09

C．2+0.2%等于2.2% D．增产三成五就是增产3.5%

2．一块地原产小麦25吨，去年因水灾减产二成，今年又增产二成，这样今年产量和原产量比( )

A．增加了 B．减少了 C．没变 D．无法确定

3．小英把1000元按年利率2.45%存入银行，两年后计算她应得到的本金和利息，列式应是( )

A．1000×2.45%×2 B．(1000×2.45%+1000)×2

C．1000×2.45%+1000×2 D．1000×(1+2.45%×2)

4．某班女生人数如果减少，就与男生人数相等，那么下列说法不正确的是( )

A．男生比女生少20% B．女生是男生的125%

C．女生比男生多20% D．女生人数占全班的

**三、根据下列条件，求*a*∶*b*∶*c*：（本题满分8分，第1题2分，2，3每题3分）**

1．已知*a*∶*c*=3∶4，*b*∶*c*=7∶5 2．已知*a*∶*c*=1.2∶0.5，*b*∶*c*=1.6∶1

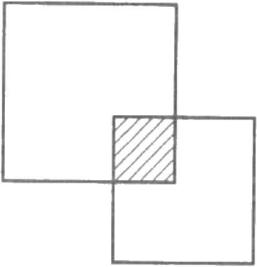
3．已知*a*∶*c*=，*b*∶*c*=

**四、应用题：（本题满分35分，每小题7分）**

1．商场把一件商品按标价的九折出售，仍可获利20%，已知该商品的进价为42元，那么该商品标价为多少元？

2．一批进口商品价值400万元，其中60%按税率15%纳税，其余按8%的税率纳税，这批商品一共要纳税多少元？

3．已知有大小两个正方形的公共部分占大正方形面积的20%，占小正方形面积的30%，若小正方形边长为10厘米，求大正方形面积．



4．张晶在银行存了30000元人民币，定期五年，年利率是2.88%.到期时交纳利息所得税20%后，银行应付给张晶本金和利息一共多少元？

5.一商店批进衬衫500件，每件进货价为30元，准备每件加价30%出售.问：

(1)预计可以盈利多少元？

(2)当这批衬衫售出90%以后，将余下的按8折继续出售，这样这批衬衫全部售完，实际盈利多少元？